УДК 519.2:303.732.4

ТЕОРИЯ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ – ЧАСТЬ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Орлов Александр Иванович
д.э.н., д.т.н., к.ф.-м.н., профессор

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5, prof-orlov@mail.ru

Одно из принципиальных положений системной нечеткой интервальной математики – утверждение о том, что теория нечетких множеств является частью теории случайных множеств, тем самым – частью теории вероятностей. Статья посвящена обоснованию этого утверждения. Доказан ряд теорем, показывающих, что нечеткие множества и результаты операций над ними можно рассматривать как проекции случайных множеств и результатов соответствующих операций над ними

Ключевые слова: НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА, ФУНКЦИЯ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ, АЛГЕБРА НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ, ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, СЛУЧАЙНЫЕ МНОЖЕСТВА, РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ПРОЕКЦИЯ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВА

UDC 519.2:303.732.4

FUZZY SETS THEORY AS THE PART OF PROBABILITY THEORY

Orlov Alexander Ivanovich
Dr.Sci.Econ., Dr.Sci.Tech., Cand.Phys-Math.Sci., professor
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

One of the key provisions of the system fuzzy interval mathematics - the claim that the theory of fuzzy sets is the part of the theory of random sets, thus, part of the probability theory. The article is devoted to the justification of this statement. Proved number of theorems that show that the fuzzy sets and the results of operations on them can be viewed as the projections of random sets and the results of the corresponding operations on them

Keywords: FUZZY SETS, MEMBERSHIP FUNCTION, ALGEBRA OF FUZZY SETS, PROBABILITY THEORY, RANDOM SETS, PROBABILITY DISTRIBUTION, RANDOM SET PROJECTION

В статье [1] сформулированы основные идеи системной нечеткой интервальной математики. Разработка этого перспективного направления теоретической и вычислительной математики поддержано специалистами, в частности, на всероссийской конференции «Философия математики – 2013» [2]. Одно из принципиальных положений статьи [1] состоит в том, что теорию нечетких множеств можно рассматривать как часть теории случайных множеств, тем самым – как часть теории вероятностей. А именно, нечеткие множества можно рассматривать как проекции случайных множеств, подобно тому, как за функциями распределения видны случайные величины, порождающие эти функции распределения. В настоящей статье это принципиальное положение развернуто в виде цепочки теорем. Хотя в настоящее время при решении прикладных задач вероятностно-статистические методы и методы теории нечеткости обычно рассматриваются как различные, их внутренне единство заслуживает обсуждения и применения.

1. Нечеткие множества

В 1965 г. в журнале «Информация и управление» появилась статья Лотфи А. Заде, профессора информатики Калифорнийского Университета в Беркли, специалиста по теории управления сложными системами [3]. Она называлась непривычно: «Fuzzy Sets». Второе слово этого названия переводится с английского языка привычным математическим термином «множества», а вот первое никогда до тех пор в кибернетической литературе не использовалось. Согласно словарю, «fuzz» - пух, пушинка, «fuzzy» - пушистый. На русский язык термин «fuzzy» переводят по-разному: нечеткий, размытый, расплывчатый, реже – туманный, пушистый и т.п.

Чтобы определить нечеткое множество, надо сначала задать совокупность всех тех элементов, для которых имеет смысл говорить о мере их принадлежности рассматриваемому нечеткому множеству. Эта совокупность называется универсальным множеством. Например, для числа зерен «кучи» - это множество натуральных чисел, для описания видимых человеческим глазом цветов – отрезок шкалы электромагнитных волн, соответствующий видимому свету.

Пусть A - некоторое универсальное множество. Подмножество B множества A характеризуется своей характеристической функцией

$$m_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B. \end{cases} \qquad (1)$$

Что такое нечеткое множество? Обычно говорят, что нечеткое подмножество C множества A характеризуется своей функцией принадлежности $m_C : A \to [0,1]$. Значение функции принадлежности в точке x

показывает степень принадлежности этой точки нечеткому множеству. Нечеткое множество описывает неопределенность, соответствующую точке x – она одновременно и входит, и не входит в нечеткое множество C. За вхождение - $m_c(x)$ шансов, за второе – (1- $m_c(x)$) шансов.

Если функция принадлежности $m_C(x)$ имеет вид (1) при некотором B, то C есть обычное (четкое) подмножество A. Таким образом, теория нечетких множество является не менее общей математической дисциплиной, чем обычная теория множеств, поскольку обычные множества – частный случай нечетких. Соответственно можно ожидать, что теория нечеткости как целое обобщает классическую математику. Однако ниже увидим, что теория нечеткости в определенном смысле сводится к теории случайных множеств и тем самым является частью классической математики. Другими словами, по степени общности обычная математика и нечеткая математика эквивалентны. Однако для практического применения в теории принятия решений описание и анализ неопределенностей с помощью теории нечетких множеств весьма плодотворны.

Обычное подмножество можно было бы отождествить с его характеристической функцией. Этого математики не делают, поскольку для задания функции (в ныне принятом подходе) необходимо сначала задать множество. Нечеткое же подмножество с формальной точки зрения можно отождествить с его функцией принадлежности. Однако термин «нечеткое подмножество» предпочтительнее при построении математических моделей реальных явлений.

Теория нечеткости является обобщением интервальной математики, в которой для описания реальных объектов вместо чисел используются интервалы. Действительно, функция принадлежности

$$m_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

задает интервальную неопределенность – про рассматриваемую величину известно лишь, что она лежит в заданном интервале $[a,\ b]$. Тем самым описание неопределенностей с помощью нечетких множеств является более общим, чем с помощью интервалов.

Начало современной теории нечеткости положено работой 1965 г. американского ученого азербайджанского происхождения Л.А. Заде. Основные определения, алгоритмы расчетов и выражающие их свойства теоремы приведены ниже. Рассуждения древнегреческих философов, Пуанкаре и Бореля (подробнее см. [1]) обосновывают методологию теорию нечеткости, но как математическая дисциплина она началась с работы Заде. За десятилетия, прошедшие с появления статьи [3], «пушистой» тематике посвящены тысячи статей и книг. Выполнено достаточно много как теоретических, так и прикладных работ. Появилось новое направление в прикладной математике – теория нечеткости. Выходят международные научные журналы, проводятся конференции, в том числе и в нашей стране. В нашей стране концепция Заде активно обсуждалась еще в 60-е и 70-е гг., однако первая книга российского автора по теории нечеткости вышла лишь в 1980 г. [4].

Л.А. Заде рассматривал теорию нечетких множеств как аппарат анализа и моделирования гуманистических систем, т.е. систем, в которых участвует человек. Его подход опирается на предпосылку о том, что элементами мышления человека являются не числа, а элементы некоторых нечетких множеств или классов объектов, для которых переход от «принадлежности» к «непринадлежности» не скачкообразен, а непрерывен. В настоящее время методы теории нечеткости используются почти во всех прикладных областях, в том числе при управлении предприятием, качеством продукции и технологическими процессами. Нет необходимости связывать теорию нечеткости только с гуманистическими системами.

Л.А. Заде использовал термины «теория нечетких множеств» и «нечеткая логика». Мы предпочитаем говорить о теории нечеткости. Термин «нечеткая логика» не является синонимом к термину «теория нечеткости», поскольку логика – это наука о мышлении человека, а теория нечеткости применяется не только для моделирования мышления. Нечеткая логика – это часть теории нечеткости.

Аппарат теории нечеткости довольно громоздок. В качестве примера дадим определения теоретико-множественных операций над нечеткими множествами. Пусть C и D – два нечетких подмножества универсального множества A с функциями принадлежности $m_C(x)$ и $m_D(x)$ соответственно. Пересечением $C \cap D$, произведением CD, объединением $C \cup D$, отрицанием $\overline{C}$, суммой $C+D$ называются нечеткие подмножества A с функциями принадлежности

$$m_{C \cap D}(x) = \min(m_C(x), m_D(x)), \quad m_{CD}(x) = m_C(x) m_D(x), \quad m_{\overline{C}}(x) = 1 - m_C(x),$$

$$m_{C \cup D}(x) = \max(m_C(x), m_D(x)), \quad m_{C+D}(x) = m_C(x) + m_D(x) - m_C(x) m_D(x), \quad x \in A,$$

соответственно.

Для знакомства со спецификой нечетких множеств рассмотрим некоторые их свойства.

В дальнейшем считаем, что все рассматриваемые нечеткие множества являются подмножествами одного и того же множества Y.

Законы де Моргана для нечетких множеств. Как известно, законами де Моргана называются следующие тождества алгебры множеств

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \qquad (2)$$

Теорема 1. Для нечетких множеств справедливы тождества

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad (3)$$

$$\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}, \qquad \overline{AB} = \overline{A}+\overline{B}. \qquad (4)$$

Доказательство теоремы 1 состоит в непосредственной проверке (как это сделано ниже при доказательстве теоремы 2) справедливости соотношений (3) и (4) путем вычисления значений функций принадлежности участвующих в этих соотношениях нечетких множеств на основе определений, данных выше.

Тождества (3) и (4) назовем *законами де Моргана для нечетких множеств*. В отличие от классического случая соотношений (2), они состоят из четырех тождеств, одна пара которых относится к операциям объединения и пересечения, а вторая - к операциям произведения и суммы. Как и соотношение (2) в алгебре множеств, законы де Моргана в алгебре нечетких множеств позволяют преобразовывать выражения и формулы, в состав которых входят операции отрицания.

Дистрибутивный закон для нечетких множеств. Некоторые свойства операций над множествами не выполнены для нечетких множеств. Так, $A + A \neq A$, за исключением случая, когда A - «четкое» множество (т.е. функция принадлежности принимает только значения 0 и 1).

Верен ли дистрибутивный закон для нечетких множеств? В литературе иногда расплывчато утверждается, что «не всегда». Внесем полную ясность.

Теорема 2. Для любых нечетких множеств A, B и C

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \qquad (5)$$

В то же время равенство

$$A(B+C) = AB + AC \qquad (6)$$

справедливо тогда и только тогда, когда при всех $y \in Y$

$$(m_A^2(y) - m_A(y))m_B(y)m_C(y) = 0.$$

Доказательство. Фиксируем произвольный элемент $y \in Y$. Для сокращения записи обозначим $a = m_A(y), b = m_B(y), c = m_C(y).$ Для доказательства тождества (5) необходимо показать, что

$$\min(a, \max(b, c)) = \max(\min(a, b), \min(a, c)). \qquad (7)$$

Рассмотрим различные упорядочения трех чисел *a, b, c.* Пусть сначала $a \le b \le c.$ Тогда левая часть соотношения (7) есть $\min(a, c) = a,$ а правая $\max(a, a) = a,$ т.е. равенство (7) справедливо.

Пусть $b \le a \le c.$ Тогда в соотношении (7) слева стоит $\min(a, c) = a,$ а справа $\max(b, a) = a,$ т.е. соотношение (7) опять является равенством.

Если $b \le c \le a,$ то в соотношении (7) слева стоит $\min(a, c) = c,$ а справа $\max(b, c) = c,$ т.е. обе части снова совпадают.

Три остальные упорядочения чисел *a, b, c* разбирать нет необходимости, поскольку в соотношение (6) числа *b* и *c* входят симметрично. Тождество (5) доказано.

Второе утверждение теоремы 2 вытекает из того, что в соответствии с определениями операций над нечеткими множествами

$$m_{A(B+C)}(y) = a(b + c - bc) = ab + ac - abc$$

и

$$m_{AB+AC}(y) = ab + ac - (ab)(ac) = ab + ac - a^2bc.$$

Эти два выражения совпадают тогда и только тогда, когда, когда $a^2bc = abc,$ что и требовалось доказать.

Определение 1. Носителем нечеткого множества *A* называется совокупность всех точек $y \in Y$, для которых $m_A(y) > 0.$

Следствие теоремы 2. Если носители нечетких множеств *B* и *C* совпадают с *У*, то равенство (6) имеет место тогда и только тогда, когда *A* - «четкое» (т.е. обычное, классическое, не нечеткое) множество.

Доказательство. По условию $m_B(y)m_C(y)\neq 0$ при всех $y\in Y$. Тогда из теоремы 2 следует, что $m_A^2(y)-m_A(y)=0$, т.е. $m_A(y)=1$ или $m_A(y)=0$, что и означает, что A - четкое множество.

2. Теория нечеткости как часть теории случайных множеств

Что такое случайное множество? Начнем с понятия случайной величины. Это величина, зависящая от случая, т.е. функция от элементарного исхода (события). Скажем, результат наблюдения, зависящий от случайных привходящих факторов. А случайное множество – это множество, зависящее от случая. Другими словами, функция, область определения которой – пространство элементарных событий, а область значений – совокупность множеств, например, совокупность всех подмножеств некоторого конкретного множества.

Случайные множества используются во многих прикладных задачах [5]. В монографиях [6, 7] случайные множества использовались для моделирования распространения лесных пожаров. Пусть пожар начался с загорания в определенной точке. В следующий момент времени загорятся некоторые из соседних точек. А некоторые не загорятся. Через час огнем будет охвачено некоторое множество. Форма пожара будет описываться случайным множеством, зависящим от времени.

От чего зависит форма пожара? Конечно, от того, как «устроен» лес – какие в нем породы деревьев, сколько сухостоя, есть ли естественные преграды для огня (ручьи, овраги), а также от метеорологических условий – куда дует ветер, сколько осадков выпало за последнее время, какова температура воздуха… Все эти условия неизвестны в точности наблюдателю на самолете. Поэтому для него вполне естественно моделировать распространение пожара с помощью теории вероятностей. Эти модели, разработанные на основе теории случайных множеств, находят применение в лесном хозяйстве [6, 7].

Теория нечетких множеств сводится к теории случайных множеств с помощью понятия «проекция случайного множества». С каждым случайным множеством можно связать некоторую функцию – вероятность того, что элемент принадлежит множеству. Эта функция обладает всеми свойствами функции принадлежности нечеткого множества. Соответствующее нечеткое множество и называют проекцией исходного случайного множества. Оказывается, верно и обратное – для любого размытого множества можно подобрать случайное множество так, что вероятность принадлежности элемента случайному множеству всюду совпадает с функцией принадлежности заданного размытого множества. Подобное соответствие можно установить так, что результаты операций над множествами тоже будут соответствовать друг другу.

Есть все основания полагать, что связь между размытостью и вероятностью позволит применить в теории нечеткости методы и результаты, накопленные в теории случайных множеств. И наоборот, даст возможность перенести понятия и постановки задач из первой теории во вторую, что послужит прогрессу в обеих.

Почему же специалисты по нечетким множествам порою «открещиваются» от теории вероятностей? Одна из причин – устаревшее на три четверти века представление о математике случая, согласно которой она рассматривается как «наука о массовых явлениях»: вероятность мыслится как предел частоты, а случайное событие – как то, которое может произойти, а может не произойти. Всё это – отголоски далекого прошлого, когда теория вероятностей недостаточно отделялась от ее приложений. Ныне она опирается на четкую систему аксиом, обычно – на аксиоматику А.Н. Колмогорова. В 1933 г. им опубликована основополагающая монография [8], заложившая научные основы современной теории вероятностей. Теоремы в ней доказываются точно так же, как и в любом другом разделе математики, без всяких ссылок на свойства реального мира. Ее выводы могут применяться при анализе весьма различных реальных явлений – как массовых, так и таких, где нет и речи о массовости и частоте. Именно таковы многие расплывчатости, «нечастотную» природу которых специалисты по нечетким множествам зачастую рассматривают как причину несводимости к понятиям теории вероятностей.

Разберем подробнее связи между теорией нечеткости и теорией случайных множеств.

Нечеткие множества как проекции случайных множеств. С самого начала появления современной теории нечеткости в 60-е гг. началось обсуждение ее взаимоотношений с теорией вероятностей. Дело в том, что функция принадлежности нечеткого множества напоминает распределение вероятностей. Отличие только в том, что сумма вероятностей по всем возможным значениям случайной величины (или интеграл, если множество возможных значений несчетно) всегда равна 1, а сумма S значений функции принадлежности (в непрерывном случае - интеграл от функции принадлежности) может быть любым неотрицательным числом. Возникает искушение пронормировать функцию принадлежности, т.е. разделить все ее значения на S (при $S \neq 0$), чтобы свести ее к распределению вероятностей (или к плотности вероятности). Однако специалисты по нечеткости справедливо возражают против такого «примитивного» сведения, поскольку оно проводится отдельно для каждой размытости (нечеткого множества), и определения обычных операций над нечеткими множествами с ним согласовать нельзя. Последнее утверждение означает следующее. Пусть указанным образом преобразованы функции принадлежности нечетких множеств A и B. Как при этом преобразуются функции принадлежности $A \cap B, A \cup B, A+B, AB$? Установить это *невозможно в принципе*. Последнее утверждение становится совершенно ясным после рассмотрения нескольких примеров пар нечетких множеств с одними и теми же суммами значений функций принадлежности, но различными результатами теоретико-множественных операций над ними, причем и суммы значений соответствующих функций принадлежности для этих результатов теоретико-множественных операций, например, для пересечений множеств, также различны.

В работах по нечетким множествам довольно часто утверждается, что теория нечеткости является самостоятельным разделом прикладной математики и не имеет отношения к теории вероятностей (см., например, обзор литературы в монографиях [4, 5]). Авторы, сравнившие теорию нечеткости и теорию вероятностей, обычно подчеркивали различие между этими областями теоретических и прикладных исследований. Обычно сравнивают аксиоматику и сравнивают области приложений. Надо сразу отметить, что аргументы при втором типе сравнений не имеют доказательной силы, поскольку по поводу границ применимости даже такой давно выделившейся научной области, как вероятностно-статистические методы, имеются различные мнения. И с арифметикой не лучше. Итог рассуждений одного из наиболее известных французских математиков Анри Лебега по поводу границ применимости арифметики таков: «Арифметика применима тогда, когда она применима» (см. его монографию [9, с.21-22]).

При сравнении различных аксиоматик теории нечеткости и теории вероятностей нетрудно увидеть, что списки аксиом различаются. Из этого, однако, отнюдь не следует, что между указанными теориями нельзя установить связь, типа известного сведения евклидовой геометрии на плоскости к арифметике (точнее к теории числовой системы R^2 - см., например, монографию [10]). Напомним, что эти две аксиоматики - евклидовой геометрии и арифметики - на первый взгляд весьма сильно различаются.

Можно понять желание энтузиастов нового направления подчеркнуть принципиальную новизну своего научного аппарата. Однако не менее важно установить связи нового подхода с ранее известными. Рассмотрим метод сведения теории нечетких множеств к теории случайных множеств.

Определение 2. Пусть $A = A(w)$ - *случайное подмножество конечного множества У.* Нечеткое множество *В,* определенное на *У,* называется проекцией *А* и обозначается *Proj A,* если

$$m_B(y) = P(y \in A) \qquad (8)$$

при всех $y \in Y$.

Очевидно, каждому случайному множеству *А* можно поставить в соответствие с помощью формулы (8) нечеткое множество *В = Proj A.* Оказывается, верно и обратное.

Теорема 3. Для любого нечеткого подмножества *В* конечного множества *У* существует случайное подмножество *А* множества *У* такое, что *В = Proj A.*

Доказательство. Достаточно задать распределение случайного множества *А*. Пусть $У_1$ - носитель *В* (см. определение 1 выше). Без ограничения общности можно считать, что $Y_1 = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ при некотором m и элементы $У_1$ занумерованы в таком порядке, что

$$0 < m_B(y_1) \le m_B(y_2) \le ... \le m_B(y_m).$$

Введем множества

$$Y(1) = Y_1, Y(2) = \{y_2, ..., y_m\}, ..., Y(t) = \{y_t, ..., y_m\}, ..., Y(m) = \{y_m\}.$$

Положим

$$P(A = Y(1)) = m_B(y_1), \quad P(A = Y(2)) = m_B(y_2) - m_B(y_1), ...,$$

$$P(A = Y(t)) = m_B(y_t) - m_B(y_{t-1}), ..., P(A = Y(m)) = m_B(y_m) - m_B(y_{m-1}),$$

$$P(A = \varnothing) = 1 - m_B(y_m).$$

Для всех остальных подмножеств X множества $У$ положим $P(A=X)=0$. Поскольку элемент y_t входит во множества $Y(1)$, $Y(2)$,…, $Y(t)$ и не входит во множества $Y(t+1)$,…, $Y(m)$, то из приведенных выше формул следует, что $P(y_t \in A) = m_B(y_t)$. Если $y \notin Y_1$, то, очевидно, $P(y \in A) = 0$. Теорема 3 доказана.

Распределение случайного множества с независимыми элементами, как следует из [11], полностью определяется его проекцией. Для конечного случайного множества общего вида это не так. Для уточнения сказанного понадобится следующая теорема.

Теорема 4. Для случайного подмножества A множества $У$ из конечного числа элементов наборы чисел

$$P(A = X), X \subseteq Y, \text{ и } P(X \subseteq A), X \subseteq Y,$$

выражаются один через другой.

Доказательство. Второй набор выражается через первый следующим образом:

$$P(X \subseteq A) = \sum_{X':X \subseteq X'} P(A = X').$$

Элементы первого набора выразить через второй можно с помощью формулы включений и исключений из формальной логики, в соответствии с которой

$$P(A = X) = P(X \subseteq A) - \sum P(X \cup \{y\} \subseteq A) + \sum P(X \cup \{y_1, y_2\} \subseteq A) - \ldots \pm P(Y \subseteq A).$$

В этой формуле в первой сумме y пробегает все элементы множества $Y \backslash X$, во второй сумме переменные суммирования y_1 и y_2 не совпадают и также пробегают это множество, и т.д. Ссылка на формулу включений и исключений завершает доказательство теоремы 4.

В соответствии с теоремой 4 случайное множество A можно характеризовать не только распределением, но и набором чисел $P(X \subseteq A), X \subseteq Y$. В этом наборе $P(\varnothing \subseteq A) = 1$, а других связей типа равенств нет. В этот набор входят числа $P(\{y\} \subseteq A) = P(y \in A)$, следовательно, фиксация проекции случайного множества эквивалентна фиксации k = $Card(Y)$ параметров из (2^k-1) параметров, задающих распределение случайного множества A в общем случае. (Здесь символом $Card(Y)$ обозначено число элементов множества Y.)

Будет полезна следующая теорема.

Теорема 5. Если $Proj\ A = B$, то $Proj\,\overline{A} = \overline{B}$.

Для доказательства достаточно воспользоваться тождеством из теории случайных множеств $P(\overline{A} = X) = P(A = \overline{X})$, формулой для вероятности накрытия $P(y \in A)$, определением отрицания нечеткого множества и тем, что сумма всех $P(A=X)$ равна 1. Под формулой для вероятности накрытия имеется в виду следующее утверждение: чтобы найти вероятность накрытия фиксированного элемента q случайным подмножеством S конечного множества Q, достаточно вычислить

$$P(q \in S) = \mathrm{P}(\{w : q \in S(w)\}) = \sum_{A: q \in A,\, A \subseteq 2^Q} P(S = A),$$

где суммирование идет по всем подмножествам A множества Q, содержащим q.

Пересечения и произведения нечетких и случайных множеств. Выясним, как операции над случайными множествами соотносятся с операциями над их проекциями. В силу законов де Моргана (теорема 1) и теоремы 5 достаточно рассмотреть операцию пересечения случайных множеств.

Теорема 6. Если случайные подмножества A_1 и A_2 конечного множества $У$ независимы, то нечеткое множество $\mathrm{Pr}\,oj(A_1 \cap A_2)$ является произведением нечетких множеств $Proj\ A_1$ и $Proj\ A_2$.

Доказательство. Надо показать, что для любого $y \in Y$

$$P(y \in A_1 \cap A_2) = P(y \in A_1)P(y \in A_2). \qquad (9)$$

По формуле для вероятности накрытия точки случайным множеством (см. выше)

$$P(y \in A_1 \cap A_2) = \sum_{X:y \in X} P((A_1 \cap A_2) = X). \qquad (10)$$

Легко проверить, что распределение пересечения случайных множеств $A_1 \cap A_2$ можно выразить через их совместное распределение следующим образом:

$$P(A_1 \cap A_2 = X) = \sum_{X_1, X_2 : X_1 \cap X_2 = X} P(A_1 = X_1, A_2 = X_2). \qquad (11)$$

Из соотношений (10) и (11) следует, что вероятность накрытия для пересечения случайных множеств можно представить в виде двойной суммы

$$P(y \in A_1 \cap A_2) = \sum_{X:y \in X} \sum_{X_1, X_2 : X_1 \cap X_2 = X} P(A_1 = X_1, A_2 = X_2). \qquad (12)$$

Заметим теперь, что правую часть формулы (12) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{X_1, X_2 : e \in X_1, e \in X_2} P(A_1 = X_1, A_2 = X_2). \qquad (13)$$

Действительно, формула (12) отличается от формулы (13) лишь тем, что в ней сгруппированы члены, в которых пересечение переменных суммирования $X_1 \cap X_2$ принимает постоянное значение. Воспользовавшись определением независимости случайных множеств и правилом перемножения сумм, получаем, что из (12) и (13) вытекает равенство

$$P(y \in A_1 \cap A_2) = \left(\sum_{X_1 : y \in X_1} P(A_1 = X_1) \right) \left(\sum_{X_2 : y \in X_2} P(A_2 = X_2) \right).$$

Для завершения доказательства теоремы 6 достаточно еще раз сослаться на формулу для вероятности накрытия точки случайным множеством.

Определение 3. Носителем случайного множества C называется совокупность всех тех элементов $y \in Y$, для которых $P(y \in C) > 0$.

Теорема 7. Равенство

$$Proj(A_1 \cap A_2) = (Proj\, A_1) \cap (Proj\, A_2)$$

верно тогда и только тогда, когда пересечение носителей случайных множеств $\overline{A_1} \cap A_2$ и $A_1 \cap \overline{A_2}$ пусто.

Доказательство. Необходимо выяснить условия, при которых

$$P(y \in A_1 \cap A_2) = \min(P(y \in A_1), P(y \in A_2)). \qquad (14)$$

Положим

$$p_1 = P(y \in A_1 \cap A_2), p_2 = P(y \in \overline{A_1} \cap A_2), p_3 = P(y \in A_1 \cap \overline{A_2}).$$

Тогда равенство (14) сводится к условию

$$p_1 = \min(p_1 + p_2, p_1 + p_3). \quad (15)$$

Ясно, что соотношение (15) выполнено тогда и только тогда, когда p_2p_3=0 при всех $y \in Y$, т.е. не существует ни одного элемента $y_0 \in Y$ такого, что одновременно $P(y_0 \in \overline{A}_1 \cap A_2) > 0$ и $P(y_0 \in A_1 \cap \overline{A_2}) > 0$, а это эквивалентно пустоте пересечения носителей случайных множеств $\overline{A_1} \cap A_2$ и $A_1 \cap \overline{A_2}$. Теорема 7 доказана.

Сведение последовательности операций над нечеткими множествами к последовательности операций над случайными множествами. Выше получены некоторые связи между нечеткими и случайными множествами. Изучение этих связей [4, 5] началось с введения случайных множеств с целью развития и обобщения аппарата нечетких множеств Л.А. Заде. Дело в том, что математический аппарат нечетких множеств не позволяет в должной мере учитывать различные варианты зависимости между понятиями (объектами), моделируемыми с его помощью, не является достаточно гибким. Так, для описания «общей части» двух нечетких множеств есть лишь две операции - произведение и пересечение. Если применяется первая из них, то фактически предполагается, что множества ведут себя как проекции независимых случайных множеств (см. выше теорему 6). Операция пересечения также накладывает вполне определенные ограничения на вид зависимости между множествами (см. выше теорему 7), причем в этом случае найдены даже необходимые и достаточные условия. Желательно иметь более широкие возможности для моделирования зависимости между множествами (понятиями, объектами). Использование математического аппарата случайных множеств предоставляет такие возможности.

Цель сведения теории нечетких множеств к теории случайных множеств - за любой конструкцией из нечетких множеств увидеть конструкцию из случайных множеств, определяющую свойства первой, аналогично тому, как за плотностью распределения вероятностей мы видим случайную величину. Приведем результаты по сведению алгебры нечетких множеств к алгебре случайных множеств.

Определение 4. Вероятностное пространство $\{\Omega, G, P\}$ назовем делимым, если для любого измеримого множества $X \in G$ и любого положительного числа a, меньшего $P(X)$, можно указать измеримое множество $Y \subset X$ такое, что $P(Y) = a$.

Пример. Пусть Ω - единичный куб конечномерного линейного пространства, G есть сигма-алгебра борелевских множеств, а P - мера Лебега. Тогда $\{\Omega, G, P\}$ - делимое вероятностное пространство.

Таким образом, делимое вероятностное пространство - это не экзотика. Обычный куб является примером такого пространства.

Доказательство сформулированного в примере утверждения проводится стандартными математическими приемами. Они основаны на том, что измеримое множество можно сколь угодно точно приблизить открытыми множествами, последние представляются в виде суммы не более чем счетного числа открытых шаров, а для шаров делимость проверяется непосредственно (от шара X тело объема $a < P(X)$ отделяется соответствующей плоскостью).

Теорема 8. Пусть даны случайное множество A на делимом вероятностном пространстве $\{\Omega, G, P\}$ со значениями во множестве всех подмножеств множества Y из конечного числа элементов, и нечеткое множество D на Y. Тогда существуют случайные множества C_1, C_2, C_3, C_4 на том же вероятностном пространстве такие, что

$$Proj(A \cap C_1) = B \cap D,\ Proj(A \cap C_2) = BD,\ Proj(A \cup C_3) = B \cup D,$$

$$Proj(A \cup C_4) = B + D,\ Proj\,C_i = D,\ i = 1,2,3,4,$$

где $B = Proj\ A$.

Доказательство. В силу справедливости законов де Моргана для нечетких (см. теорему 1 выше) и для случайных множеств, а также теоремы 5 выше (об отрицаниях) достаточно доказать существование случайных множеств C_1 и C_2.

Рассмотрим распределение вероятностей во множестве всех подмножеств множества Y, соответствующее случайному множеству C такому, что $Proj\ C = D$ (оно существует в силу теоремы 3). Построим случайное множество C_2 с указанным распределением, независимое от A. Тогда $Proj(A \cap C_2) = BD$ по теореме 6.

Перейдем к построению случайного множества C_1. По теореме 7 необходимо и достаточно определить случайное множество $C_1(w)$ так, чтобы $ProjC_1 = D$ и пересечение носителей случайных множеств $A \cap \overline{C_1}$ и $\overline{A} \cap C_1$ было пусто, т.е.

$$p_3 = P(y \in A \cap \overline{C_1}) = 0$$

для $y \in Y_1 = \{y : m_B(y) \le m_D(y)\}$ и

$$p_2 = P(y \in \overline{A} \cap C_1) = 0$$

для $y \in Y_2 = \{y : m_B(y) \ge m_D(y)\}$.

Построим $C_1(w)$, исходя из заданного случайного множества $A(w)$. Пусть $y_1 \in Y_2$. Исключим элемент y_1 из $A(w)$ для стольких элементарных событий w, чтобы для полученного случайного множества $A_1(w)$ было справедливо равенство

$$P(y_1 \in A_1) = m_D(y_1)$$

(именно здесь используется делимость вероятностного пространства, на котором задано случайное множество $A(w)$). Для $y \neq y_1$, очевидно,

$$P(y \in A_1) = P(y \in A).$$

Аналогичным образом последовательно исключаем y из $A(w)$ для всех $y \in Y_2$ и добавляем y в $A(w)$ для всех $y \in Y_1$, меняя на каждом шагу $P(y \in A_i)$ только для $y = y_i$ так, чтобы

$$P(y_i \in A_i) = m_D(y_i)$$

(ясно, что при рассмотрении $y_i \in Y_1 \cap Y_2$ случайное множество $A_i(w)$ не меняется). Перебрав все элементы Y, получим случайное множество $A_k(w) = C_1(w)$, для которого выполнено требуемое. Теорема 8 доказана.

Основной результат о сведении теории нечетких множеств к теории случайных множеств дается следующей теоремой.

Теорема 9. Пусть $B_1, B_2, B_3, ..., B_t$ - некоторые нечеткие подмножества множества Y из конечного числа элементов. Рассмотрим результаты последовательного выполнения теоретико-множественных операций

$$B^m = ((...((B_1 \circ B_2) \circ B_3) \circ ...) \circ B_{m-1}) \circ B_m, \quad m = 1,2,...,t,$$

где $\circ$ - символ одной из следующих теоретико-множественных операций над нечеткими множествами: пересечение, произведение, объединение, сумма (на разных местах могут стоять разные символы). Тогда существуют случайные подмножества $A_1, A_2, A_3, ..., A_t$ того же множества Y такие, что

$$Proj\, A_i = B_i,\ i = 1,2,...,t,$$

и, кроме того, результаты теоретико-множественных операций связаны аналогичными соотношениями

$$Proj\{((...((A_1 \otimes A_2) \otimes A_3) \otimes ...) \otimes A_{m-1}) \otimes A_m\} = B^m,\ m = 1,2,...,t,$$

где знак $\otimes$ означает, что на рассматриваемом месте стоит символ пересечения $\cap$ случайных множеств, если в определении B^m стоит символ пересечения или символ произведения нечетких множеств, и соответственно символ объединения $\cup$ случайных множеств, если в B^m стоит символ объединения или символ суммы нечетких множеств.

Комментарий. Поясним содержание теоремы. Например, если

$$B^5 = (((B_1 + B_2) \cap B_3)B_4) \cup B_5,$$

то

$$(((A_1 \otimes A_2) \otimes A_3) \otimes A_4) \otimes A_5 = (((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \cap A_4) \cup A_5.$$

Как совместить справедливость дистрибутивного закона для случайных множеств (вытекающего из его справедливости для обычных множеств) с теоремой 2 выше, в которой показано, что для нечетких множеств, вообще говоря, $(B_1 + B_2)B_3 \neq B_1B_3 + B_2B_3$? Дело в том, что хотя в соответствии с теоремой 9 для любых трех нечетких множеств B_1, B_2 и B_3 можно указать три случайных множества A_1, A_2 и A_3 такие, что

$$Proj(A_i) = B_i,\ i = 1,2,3,\ Proj(A_1 \cup A_2) = B_1 + B_2,\ Proj((A_1 \cup A_2) \cap A_3) = B^3,$$

где

$$B^3 = (B_1 + B_2)B_3,$$

но при этом, вообще говоря,

$$Proj(A_1 \cap A_3) \neq B_1B_3$$

и, кроме случаев, указанных в теореме 2,

$$Proj((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \neq B_1B_3 + B_2B_3.$$

Доказательство теоремы 9 проводится по индукции. При t = 1 распределение случайного множества строится с помощью теоремы 3. Затем конструируется само случайное множество A_1, определенное на делимом вероятностном пространстве (нетрудно проверить, что на делимом вероятностном пространстве можно построить случайное подмножество конечного множества с любым заданным распределением именно в силу делимости пространства). Далее случайные множества A_2, A_3, …, A_t строим по индукции с помощью теоремы Теорема 9 доказана.

Замечание. Проведенное доказательство теоремы 9 проходит и в случае, когда при определении B^m используются отрицания, точнее, кроме B^m ранее введенного вида используются также последовательности результатов теоретико-множественных операций, очередной шаг в которых имеет вид

$$B_1^m = \overline{B^{m-1}} \mathbf{0} B_m, \quad B_2^m = B^{m-1} \mathbf{0} \overline{B_m}, \quad B_3^m = \overline{B^{m-1}} \mathbf{0} \overline{B_m}.$$

А именно, сначала при помощи законов де Моргана (теорема 1 выше) проводится преобразование, в результате которого в последовательности B^m остаются только отрицания отдельных подмножеств из совокупности $B_1, B_2, B_3, ..., B_t$, а затем с помощью теоремы 5 вообще удается избавиться от отрицаний и вернуться к условиям теоремы 9.

Итак, в настоящем разделе описаны связи между такими объектами нечисловой природы, как нечеткие и случайные множества, установленные в нашей стране в первой половине 70-х годов, начиная с работы [12]. Через несколько лет, а именно, в начале 80-х годов, близкие подходы стали развиваться и за рубежом. Одна из работ [13] носит примечательное название «Нечеткие множества как классы эквивалентности случайных множеств».

В эконометрике и прикладной статистике разработан ряд методов статистического анализа нечетких данных, в том числе методы классификации, регрессии, проверки гипотез о совпадении функций принадлежности по опытным данным и т.д., при этом оказались полезными общие подходы статистики объектов нечисловой природы [11]. Методологические и прикладные вопросы теории нечеткости широко обсуждаются в литературе. Приведем пример.

3. Нечеткий экспертный выбор в контроллинге инноваций

Обсудим одно применение экспертных технологий, разработанных на основе теории нечеткости.

В настоящее время активно разрабатывается подход к управлению инновационными проектами, основанный на методологии контроллинга. Одной из главных причин возникновения и внедрения концепции контроллинга для разработки инноваций на промышленных предприятиях стала необходимость в системной интеграции различных аспектов управления инновационными проектами. Контроллинг обеспечивает методическую и инструментальную базу для поддержки основных функций менеджмента: планирования, учета, контроля и анализа, а также оценки ситуаций для принятия управленческих решений [14].

Этапы контроллинга инноваций. Согласно [15], контроллинг инноваций включает в себя:

- оценку реализуемости проекта;
- информационную поддержку планирования разработки инновационного проекта;
- информационную поддержку контроля над осуществлением инновационного проекта;
- информационную поддержку функции анализа.

На первом этапе контроллеру проекта необходимо ответить на вопрос: достигнет ли предприятие поставленных перед ним целей, если приступит к реализации проекта. Цели проекта - как и цели самого предприятия, должны иметь ясный смысл, результаты, полученные при достижении цели, должны быть измеримы, а заданные ограничения (по времени, рамкам бюджета, выделенным ресурсам и качеству получаемых результатов) выполнимы. Если при реализации проекта общефирменные цели не достигаются, то подразделение контроллинга вырабатывает предложения об альтернативных вариантах реализации проекта, способных удовлетворить поставленные цели.

На этом этапе возникает задача выбора варианта реализации проекта, позволяющего достичь общефирменные цели.

Для решения этой задачи можно воспользоваться эконометрическими методами. Эконометрика - это наука, изучающая конкретные количественные и качественные взаимосвязи экономических объектов и процессов с помощью математических и статистических методов и моделей, поэтому именно в эконометрике следует искать методы для решения поставленной задачи.

Каждый предложенный вариант реализации проекта имеет свои преимущества и недостатки. Он может характеризоваться как количественными экономическими показателями, такими, как затраты, поступления и др., техническими показателями, описывающими характеристики качества разрабатываемого продукта, так и качественными показателями, выраженными в виде терминов, например, крошечный, маленький, средний.

Целесообразно выделить эталонный вариант реализации проекта и его характеристики. Характеристики подбираются таким образом, чтобы проект был оптимальным с точки зрения предъявляемых к нему требований. Чтобы сравнить варианты реализации проекта с эталонным вариантом и выбрать из них лучший, можно применить эконометрические методы, основанные на алгоритмах анализа качественных и количественных данных. Такие методы подробнее рассматриваются ниже.

На втором этапе осуществляется разработка планово-организационных мероприятий. Подразделение контроллинга разрабатывает методики и инструменты планирования, наилучшим образом подходящие в данных условиях и обеспечивающие наиболее точные результаты. Подготовленный план проверяется на реализуемость, затем решаются вопросы, связанные с координацией участников проекта, с организацией информационного потока, с организацией работ и назначением ответственных.

На третьем этапе устанавливается время проведения контрольных мероприятий, связанное с выполнением определенных блоков работ. Выбираются подконтрольные показатели, характеризующие финансовое и организационное состояние проекта. Устанавливаются допустимые отклонения выбранных показателей, превышение которых может привести к негативным последствиям. Проводится учет показателей, фиксация отклонений. Выявляются причины и виновники отклонений.

На заключительном четвертом этапе подразделение контроллинга оценивает влияние выявленных отклонений на дальнейшие шаги реализации проекта. Выясняет, как выявленные отклонения повлияли на основные управляемые параметры проекта.

По окончанию цикла контроллер проекта подготавливает отчет с предложением вариантов решения возникших проблем и изменением плановых величин на следующий период.

Эконометрические методы сравнения и выбора. На первом этапе контроллинга инноваций необходимо решить задачу выбора варианта реализации проекта. Выбор между вариантами очевиден, если один из вариантов лучше другого по всем рассматриваемым показателям. В реальных ситуациях выбора варианты обычно несравнимы - первый лучше по одним показателям, второй - по другим. Для сравнения вариантов целесообразно прибегать к экспертным технологиям [16].

Одна группа экспертных технологий нацелена на выявление объективного упорядочения вариантов в результате усреднения мнений экспертов. Используют различные способы расчета на основе средних рангов (прежде всего средних арифметических и медиан). Для моделирования результатов парных сравнений применяют теорию люсианов. Для экспертных оценок находят медиану Кемени, и т.д.

Другая группа экспертных технологий нацелена на получение коэффициентов весомости (важности, значимости) отдельных показателей. Итоговая оценка варианта реализации проекта получается в результате суммирования произведений значений показателей на соответствующие коэффициенты весомости. Иногда эти коэффициенты оцениваются экспертами на основе иерархической системы показателей. Более обоснованным является экспертно-статистический метод, согласно которому на основе обучающей выборки восстанавливается зависимость между показателями варианта реализации инновационного проекта и его итоговой оценкой.

Использование теории нечеткости. Для сравнения вариантов реализации инновационного проекта и выбора из них лучшего можно использовать подход, основанный на описании качественных характеристик нечеткими множествами. Опишем его [15].

Пусть $S = \{S_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ – множество, состоящее из n вариантов реализации инновационного проекта. Для каждого варианта S_i определено m характеристик Q_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, m$. В зависимости от конкретных условий набор характеристик может меняться.

Необходимо выделить эталонный вариант реализации проекта S_o и его характеристики Q_{0j}. Характеристики подбираются таким образом, чтобы проект был оптимальным с точки зрения предъявляемых к нему требований.

Требуется проранжировать имеющиеся варианты S реализации инновационного проекта по заданным m характеристикам на соответствие эталону.

Для каждой характеристики Q_{ij}, согласно рассматриваемой методике, строится нечеткое множество $Q_{ij}, i = \overline{0,n},\ j = \overline{1,m}$. Для этого сначала определяются возможные значения переменной x_j, удовлетворяющие характеристике Q_{ij}. Предполагается, что они составляют отрезок X_{ij}. Определяется середина q_{ij} и полуширина (радиус) $d_{ij} > 0$ отрезка X_{ij}: Таким образом,

$$X_{ij} = [q_{ij} - d_{ij}; q_{ij} + d_{ij}].$$

Для описания критерия Q_{ij} могут применяться различные функции принадлежности. В соответствии с [16] используем функцию принадлежности следующего вида:

$$m_{ij}(x_j) = e^{-\frac{\ln 2}{d_{ij}^2}(x_j - q_{ij})^2}, i = \overline{0,n}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Исходя из построения множества X_{ij}, в точке q_{ij} функция имеет максимум, в пределах множества X_{ij} функция принадлежности принимает значения больше 0,5, а вне X_{ij} – меньше:

$$\begin{aligned} &m_{ij} : G_j \to [0;1]; \\ &m_{ij}(q_{ij}) = 1; \\ &m_{ij}(x_j) \geq 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad x_j \in X_{ij} \end{aligned}$$

В результате получаем нечеткие множества

$$\hat{Q}_{ij} = \{x_j \mid m_{ij}(x_j)\}, \quad i = \overline{0,n}, \quad j = \overline{1,m},$$

описывающие критерии Q_{ij}.

Чтобы определить, в какой мере характеристика варианта s_i близка характеристике эталонного варианта s_o, вычисляют степень равенства v_{ij} соответствующих нечетких множеств:

$$v_{ij} = \max_{G_j} \min(m_{ij}(x_j), m_{oj}(x_j)).$$

Значение максимина достигается в точке пересечения функций принадлежности:

$$v_{ij} = m_{oj}(x_{ij}^*),$$

где

$$x_{ij}^{*} = \frac{q_{ij}d_{oj} + q_{oj}d_{ij}}{d_{oj} + d_{ij}}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Произведя взвешенное голосование, получают интегральную оценку v_i соответствия совокупности характеристик варианта реализации проекта s_i совокупности характеристик эталонного варианта s_0:

$$v_i = \sum_{j=1}^{m} a_j v_{ij},$$

где

$$a_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{m} a_j = 1.$$

Здесь a_j является весом j-го критерия и показывает уровень его важности.

При обсуждении различных подходов к выбору наилучшего варианта реализации инновационного проекта иногда противопоставляют вероятностно-статистические модели и методы теории нечеткости. С обоснованной выше методологической точки зрения весьма важно, что такое противопоставление лишено оснований.

Литература

1. Орлов А.И. Системная нечеткая интервальная математика (СНИМ) – перспективное направление теоретической и вычислительной математики / А.И. Орлов, Е.В. Луценко // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №07(091). С. 255 – 30 – IDA [article ID]: 0911307015. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2013/07/pdf/15.pdf.
2. Орлов А.И., Луценко Е.В. О развитии системной нечеткой интервальной математики // Философия математики: актуальные проблемы. Математика и реальность. Тезисы Третьей всероссийской научной конференции; 27-28 сентября 2013 г. / Редкол.: Бажанов В.А. и др. – Москва, Центр стратегической конъюнктуры, 2013. – С.190 – 193.
3. Zadeh L.A. Fuzzy sets / Information and Control. 1965. V. N 3. P.338-353.
4. Орлов А.И. Задачи оптимизации и нечеткие переменные. – М.: Знание, 1980. - 64 с.
5. Орлов А.И. Устойчивость в социально-экономических моделях. – М.: Наука, 1979. – 296 с.
6. Воробьев О.Ю., Валендик Э.Н. Вероятностное множественное моделирование распространения лесных пожаров. – Новосибирск: Наука, 1978. – 160 с.
7. Воробьев О.Ю. Среднемерное моделирование. – М.: Наука, 1984. – 136 с.

8. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. 2-е изд. – М.: Наука, 1974. – 120 с.

9. Лебег А. Об измерении величин. – М.: Учпедгиз, 1960. – 204 с.

10. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 580 с.

11. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование : в 3 ч.: Ч.1. Нечисловая статистика. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. — 541 с.

12. Орлов А.И. Основания теории нечетких множеств (обобщение аппарата Заде). Случайные толерантности // Алгоритмы многомерного статистического анализа и их применения. – М.: Изд-во ЦЭМИ АН СССР, 1975. – С.169 – 175.

13. Goodman I.R. Fuzzy sets as equivalence classes of random sets / Fuzzy Set and Possibility Theory: Recent Developments. – New York-Oxford-Toronto-Sydney-Paris-Frankfurt, Pergamon Press, 1982. – P.327 – 343. (Перевод на русский язык: Гудмэн И. Нечеткие множества как классы эквивалентности случайных множеств. - В сб.: Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения. – М.: Радио и связь, 1986. – С. 241-264.)

14. Контроллинг / А.М. Карминский, С.Г. Фалько, А.А. Жевага, Н.Ю. Иванова; под ред. А.М. Карминского, С.Г. Фалько. – 3-е изд., дораб. – М.: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА-М, 2013. – 336 с.

15. Загонова Н.С., Орлов А.И. Эконометрическая поддержка контроллинга инноваций. Нечеткий выбор / Российское предпринимательство. 2004. №4. С.54-57.

16. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование: в 3 ч.: Ч.2. Экспертные оценки. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 486 с.

References

1. Orlov A.I. Sistemnaja nechetkaja interval'naja matematika (SNIM) – perspektivnoe napravlenie teoreticheskoj i vychislitel'noj matematiki / A.I. Orlov, E.V. Lucenko // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2013. – №07(091). S. 255 – 30 – IDA [article ID]: 0911307015. – Rezhim dostupa: http://ej.kubagro.ru/2013/07/pdf/15.pdf.

2. Orlov A.I., Lucenko E.V. O razvitii sistemnoj nechetkoj interval'noj matematiki // Filosofija matematiki: aktual'nye problemy. Matematika i real'nost'. Tezisy Tret'ej vserossijskoj nauchnoj konferencii; 27-28 sentjabrja 2013 g. / Redkol.: Bazhanov V.A. i dr. – Moskva, Centr strategicheskoj kon#junktury, 2013. – S.190 – 193.

3. Zadeh L.A. Fuzzy sets / Information and Control. 1965. V. N 3. R.338-353.

4. Orlov A.I. Zadachi optimizacii i nechetkie peremennye. – M.: Znanie, 1980. - 64 s.

5. Orlov A.I. Ustojchivost' v social'no-jekonomicheskih modeljah. – M.: Nauka, 1979. – 296 s.

6. Vorob'ev O.Ju., Valendik Je.N. Verojatnostnoe mnozhestvennoe modelirovanie rasprostranenija lesnyh pozharov. – Novosibirsk: Nauka, 1978. – 160 s.

7. Vorob'ev O.Ju. Srednemernoe modelirovanie. – M.: Nauka, 1984. – 136 s.

8. Kolmogorov A.N. Osnovnye ponjatija teorii verojatnostej. 2-e izd. – M.: Nauka, 1974. – 120 s.

9. Lebeg A. Ob izmerenii velichin. – M.: Uchpedgiz, 1960. – 204 s.

10. Efimov N.V. Vysshaja geometrija. – M.: GIFML, 1961. – 580 s.

11. Orlov A.I. Organizacionno-jekonomicheskoe modelirovanie : v 3 ch.: Ch.1. Nechislovaja statistika. – M.: Izd-vo MGTU im. N.Je. Baumana, 2009. — 541 s.

12. Orlov A.I. Osnovanija teorii nechetkih mnozhestv (obobshhenie apparata Zade). Sluchajnye tolerantnosti // Algoritmy mnogomernogo statisticheskogo analiza i ih primenenija. – M.: Izd-vo CJeMI AN SSSR, 1975. – S.169 – 175.

13. Goodman I.R. Fuzzy sets as equivalence classes of random sets / Fuzzy Set and Possibility Theory: Recent Developments. – New York-Oxford-Toronto-Sydney-Paris-Frankfurt, Pergamon Press, 1982. – P.327 – 343. (Perevod na russkij jazyk: Gudmjen I. Nechetkie mnozhestva kak klassy jekvivalentnosti sluchajnyh mnozhestv. - V sb.: Nechetkie mnozhestva i teorija vozmozhnostej. Poslednie dostizhenija. – M.: Radio i svjaz', 1986. – S. 241-264.)

14. Kontrolling / A.M. Karminskij, S.G. Fal'ko, A.A. Zhevaga, N.Ju. Ivanova; pod red. A.M. Karminskogo, S.G. Fal'ko. – 3-e izd., dorab. – M.: ID «FORUM»: INFRA-M, 2013. – 336 s.

15. Zagonova N.S., Orlov A.I. Jekonometricheskaja podderzhka kontrollinga innovacij. Nechetkij vybor / Rossijskoe predprinimatel'stvo. 2004. №4. S.54-57.

16. Orlov A.I. Organizacionno-jekonomicheskoe modelirovanie: v 3 ch.: Ch.2. Jekspertnye ocenki. – M.: Izd-vo MGTU im. N.Je. Baumana, 2011. – 486 s.